ملاحظة:

إذا كان (X, τ) فضاء طبولوجي و A فضاء جزئي من X و B مجموعة جزئية من A

- فإن للمجموعة B نقاط تراكم
- إذا اعتبرنا B مجموعة جزئية من R فإن لـ B نقاط تراكم ونقاط لاصقة ونقاط داخلية في A
- وإذا اعتبرنا B مجموعة جزئية من X فإن لـ B نقاط تراكم ونقاط لاصقة ونقاط داخلية في X

* ومن الطبيعي أن ندرس العلاقة بين هذه النقاط ⇐

ومن أجل ذلك نرمز بـ B'_A ، $\bar{B}_A$ ، B°_A في الفضاء الجزئي A وبالمثل B'_X ، $\bar{B}_X$ ، B°_X

إن المبرهنة الآتية تبرهن العلاقات بين هذه المجموعات:

* **مبرهنة**

ليكن A فضاء جزئي من الفضاء الطبولوجي X ، $B \subseteq A$ إن العلاقات الآتية محققة دوماً.

1. مشتقة B لـ A ⇐ $B'_A = B'_X \cap A$
2. لصاقة B لـ A ⇐ $\bar{B}_A = \bar{B}_X \cap A$
3. داخلية B لـ A ⇐ $B^\circ_A = B^\circ_X \cap A$

* **البرهان:**

1- لنفرض أن $a \in B'_A$ (a نقطة تراكم لـ B في A) ولتكن U جواراً كيفياً لـ a في X

حسب المبرهنة السابقة فإن: $U \cap A$ هو جوار للنقطة a في A

وبما أن a نقطة تراكم فإن:

$$(U \cap A) \cap B \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

$$U \cap B \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

أي أن: النقطة a نقطة تراكم لـ U في X ⟸ $a \in B'_X \cap A$

ومن هنا نجد: $B'_A \subseteq B'_X \cap A$

ومن جهة ثانية:

لنفرض $a \in B'_X \cap A$ وليكن U جواراً كيفياً لـ A في الفضاء الجزئي A

وحسب المبرهنة السابقة ⇐ يوجد جوار W لـ a في X بحيث: $U = W \cap A$

ويتحقق الآتي:

$$U \cap B \setminus \{a\} = W \cap A \cap B \setminus \{a\} = W \cap B \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

وبما أن $W \cap B \setminus \{a\} \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ وهذا يعني ان $a \in B'_a \Longleftarrow B'_x \cap A \subseteq B'_A$

ومن علاقتي الاحتواء تنتج المساواة

2- لدينا العلاقة التالية $\bar{B} = B' \cup B$

وبالتالي بما ان هذه العلاقة محققة بأي فضاء طبولوجي $\Leftarrow$ فهي محققة بأي فضاء طبولوجي جزئي $\Longleftarrow \bar{B}_A = B'_A \cup B$ ومنه فحسب البند الأول:

$$\bar{B}_A = (B'_x \cap A) \cup B = (B'_x \cap A) \cup (B \cap A)$$

$$= (B'_A \cup B) \cap A = \bar{B}_x \cap A$$

3- $B^{\circ}_A \supseteq B^{\circ}_x \cap A$

B°_x مجموعة مفتوحة في $X \Longleftarrow B^{\circ}_x \cap A$ مفتوحة في A وهي محتواة في $B \Longleftarrow$ فهي محتواة في B° (داخلية B في A) (على اعتبار ان B° هي أكبر مجموعة مفتوحة في A)

* مثال توضيحي:

لناخذ الفضاء الحقيقي R

ولتكن $A = [0,3[$; $(B = A) \Longleftarrow A^{\circ}_R =]0,3[$

$A^{\circ}_A = A$ أصبح هو فضاء $\Leftarrow$ هو مجموعة مفتوحة مغلوقة بآن واحد

ولنفترض ان: $A = Q \Longleftarrow$

لو اعتبرنا Q فضاء جزئي $\Longleftarrow Q^{\circ} = Q$ & $Q^{\circ}_R = \emptyset$

تمرين بسيط

نفرض A فضاء جزئيا في فضاء X، $B \subseteq A$ تكون المجموعة B كثيفة في A $\Longleftarrow$ كانت لصاقة B في X تحوي الـ A $\Longleftarrow$ اي $\bar{B}_x \supseteq A$

البرهان

نفرض B كثيفة في $A \Longleftarrow \bar{B}_A = A$

حسب المبرهنة السابقة، $\bar{B}_x \supseteq A \Longrightarrow \bar{B}_x \cap A = A$

ولنفترض ان A محتواة في $\bar{B}_x \Longleftarrow$ اي $\bar{B}_x \supseteq A \Longleftarrow \bar{B}_A = \bar{B}_x \cap A = A$

اي ان المجموعة B كثيفة في A

ولنبرهن الآن ان مفهوم التطبيق المستمر هو تطبيق مستمر،

≠ مبرهنة:

ليكن f تطبيق من X الى Y (كل من X، Y فضاء طبولوجي)

$$f : X \longrightarrow Y$$

Date : / / Subject:

• A فضاءً جزئياً من الفضاء X

إذا كان f تطبيقاً مستمراً على X فإن مقصوره على A يكون أيضاً مستمراً ويرمز له f/A

البرهان:

$$A \xrightarrow{I_A} X \xrightarrow{f} Y$$

$f_\circ I_A$ تركيب تطبيقين

$$f/A = f \circ I_A$$

بما أن f مستمر بالفرض وتطبيق الإدخال مستمر وتركيب تطبيقين هو تطبيق مستمر وهو المطلوب

* ملاحظة:

لاحظنا أن مقصور التطبيق المستمر هو تطبيق مستمر العكس غير صحيح في الحالة العامة:

* مثال:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \in Q \\ 0 & , \; x \notin Q \end{cases}$$

وهي دالة ديرخلية — مستمرة تقريباً بالنسبة لـ وكان

وهي دالة غير قابلة للمكاملة حسب ريمان — إذا كانت مستمرة

لأنها محدودة ومحدودة — (باستثناء مجموعة قابلة للعد)

ومجموعة نقاط انقطاعها غير قابلة للعد — (مجموعة نقاط الانقطاع)

أي أنها منقطعة في عدد لانهائي من النقاط أي أنها غير مستمرة

- بينما لو أخذنا مقصورها على $Q \Rightarrow \varphi|_Q = 1$ وهي دالة ثابتة لأنها تساوي $\boxed{1}$

$\Leftarrow$ وبالتالي فإن مقصورها مستمر وهي غير مستمرة.

* فضاء القسمة:

لتكن (X, τ) فضاءً طبولوجياً، ρ علاقة تكافؤ على المجموعة X

- إن علاقة التكافؤ هذه تقسم المجموعة X إلى صفوف تكافؤ إن صف تكافؤ الذي يمثله العنصر x ونرمز له بـ $[x]_\rho$ أو $[x]$ نجد أنه يتألف من جميع عناصر المجموعة X المكافئة لـ x وفق ρ $[x] = [x]_\rho = \{y \in X : x\rho y\}$ وندعوه صف تكافؤ ممثله x

إن مجموعة صفوف التكافؤ تسمى مجموعة القسمة ويرمز لها بـ $X|_\rho$

• ويجب أن نتذكر أن صف التكافؤ هو عنصر واحد أو (نقطة) من مجموعة القسمة.

بينما هو مجموعة جزئية من X

• هدفنا تحويل مجموعة القسمة لفضاء طبولوجي $\Leftarrow$ ونسميه فضاء القسمة

$\Leftarrow$ لنبني طبولوجيا على مجموعة القسمة نقوم بالآتي:

1- نأخذ ما يسمى بالتطبيق القانوني $\gamma : X \longrightarrow X|_\rho$

(فضاء طبولوجي) — مجموعة

Date : / / Subject:

المعرف بالصيغة:
$$\gamma(x) = [x]$$
ويعمل هذا التطبيق بأنه:
يضع كل عنصر من X في صف التكافؤ الذي يحويه
- إن أقوى طوبولوجيا على مجموعة القسمة X/ρ تجعل التطبيق القانوني γ مستمراً، وتسمى "طوبولوجيا القسمة" ونرمز له بـ τ/ρ
* ومن الطبيعي أن مجموعة القسمة مع طوبولوجيا القسمة ⟸ تسمى فضاء القسمة ويرمز له بالرمز التالي $(X/\rho, \tau/\rho)$
والسؤال الآن كيف تبدو المجموعات المفتوحة بناءً على هذا التعريف ؟؟
أي ما هي الطوبولوجيا فعلياً ؟!
نبرهن بسهولة أن:
$$\tau/\rho = \{ G \subseteq X/\rho : \gamma^{-1}(G) \in \tau \}$$
وتعني أن المجموعات المفتوحة بفضاء القسمة هي المجموعات التي صورها العكسية وفق التطبيق القانوني هي مجموعات مفتوحة:
$$\gamma^{-1}(\phi) = \phi$$
$$\gamma^{-1}(X/\rho) = X$$
وبما أن الصورة العكسية لـ ϕ ، X/ρ هي مجموعات مفتوحة ⟸
$$\phi , X/\rho \in \tau/\rho$$
$$G_1, G_2 \in \tau/\rho \Rightarrow \gamma^{-1}(G_1 \cap G_2) = \gamma^{-1}(G_1) \cap \gamma^{-1}(G_2) \in \tau$$
$$\Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau/\rho$$
والكلام نفسه ينطبق على الاجتماع
- إذا فرضنا أن S طوبولوجيا أخرى على X/ρ بحيث γ تطبيق مستمر
⟸ نفرض $G \in S \Leftarrow \gamma^{-1}(G) \in \tau \Leftarrow G \in \tau/\rho$
إذاً فعلاً هي طوبولوجيا وهي أقوى طوبولوجيا بحيث أن γ مستمر $\Leftarrow S \in \tau/\rho$